САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 1

Решения подготовил:
Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2013 г.

Решения задач

Задача № 1.

Условие: Астроном-любитель сделал фотографию ночного неба (см. рис. 1). Определите, какие созвездия видны на фотографии (следует называть только те созвездия, бóльшая часть которых запечатлена фото). (1 балл за правильно названное созвездие).

Рис. 1.

Решение:

Рис. 2.

Созвездия, представленные на фотографии, легко идентифицировать при сравнении последней с картами звездного неба или с картиной визуализации звездного неба какой-либо компьютерной программы, например Stellarium. На рис. 2 представлен скриншот указанной программы с указанием созвездий того же участка неба. Очевидно, что на исходной фотографии видны бóльшая часть созвездий **Персея**, **Возничего**, **Тельца**, **Ориона** и **Близнецов**.

Ответ: **Персей**, **Возничий**, **Телец**, **Орион** и **Близнецы** ($\$_{max} = 5$ баллов).

Задача № 2.

<u>Условие:</u> Определите, время года, в которое можно было сделать фотографию, представленную на рис. 1, если учесть, что на фото запечатлен закат. Ответ обоснуйте. (3 балла).

<u>Решение:</u>

<u>1-ый способ</u> и наиболее простой – следует воспользоваться подвижной картой звездного неба или компьютерным симулятором, например виртуальным планетарием – Stellarium. В частности, вид звездного неба, симулированный на рис. 2 с помощью Stellarium, отвечает моменту времени – 20 часов 30 мин 14.04.2011 года. Т.о. время года, в которое можно было сделать фотографию, представленную на рис. 1 – весна.

<u>2-ый способ</u>. Определить время года можно иначе: прежде всего, следует учесть, что Орион – одно из самых выразительных и легко определяемых на фотографии созвездий, является *зимним созвездием.* Это означает, что в местную полночь оно кульминирует в зимние месяцы года, будем полагать, в начале января. Поскольку звездные сутки короче среднесолнечных на 4 минуты, то через месяц данное созвездие будет кульминировать уже в 22 часа, через 2 месяца – в 20 часов, через 3 месяца – в 18 часов, через 4 месяца – в 16 часов. Поскольку, значительная часть созвездия расположена в южной части небесной сферы, то заход созвездия произойдет существенно раньше, чем через 6 часов после его верхней кульминации. На фотографии запечатлен закат, который в средних широтах (а именно здесь можно видеть Орион полностью, да еще с запасом) не может быть позже 22 часов. Следовательно, на момент получения фотографии созвездие кульминировало не раньше 16 часов. Следовательно, от января указанная дата отстоит менее чем на 4 месяца (вперед). Следовательно, фотография сделана в апреле, т.е. весной.

<u>Ответ:</u> Весна. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3.

<u>Условие:</u> Определите также географическое полушарие, в котором находился наблюдатель, когда фотографировал небо, часть которого представлена на рис. 1. Ответ обоснуйте. (3 балла).

<u>Решение:</u>

Согласно условию предыдущей задачи, на фото запечатлен закат, отвечающий моменту – апрель-месяц (см. решение предыдущей задачи). В этот момент времени склонение Солнца больше нуля (точнее больше $+10°$). Из рисунка легко видеть, что точка заката Солнца лежит существенно западнее места захода Ориона за горизонт. Т.е. большему склонению в данном месте наблюдения отвечает более высокая суточная параллель. Такую ситуацию возможно наблюдать лишь из северного географического полушария Земли (см. для большей наглядности рис. 3).

<u>Ответ:</u> Наблюдатель находился в северном географическом полушарии. ($\$_{\max} = 3$ балла).

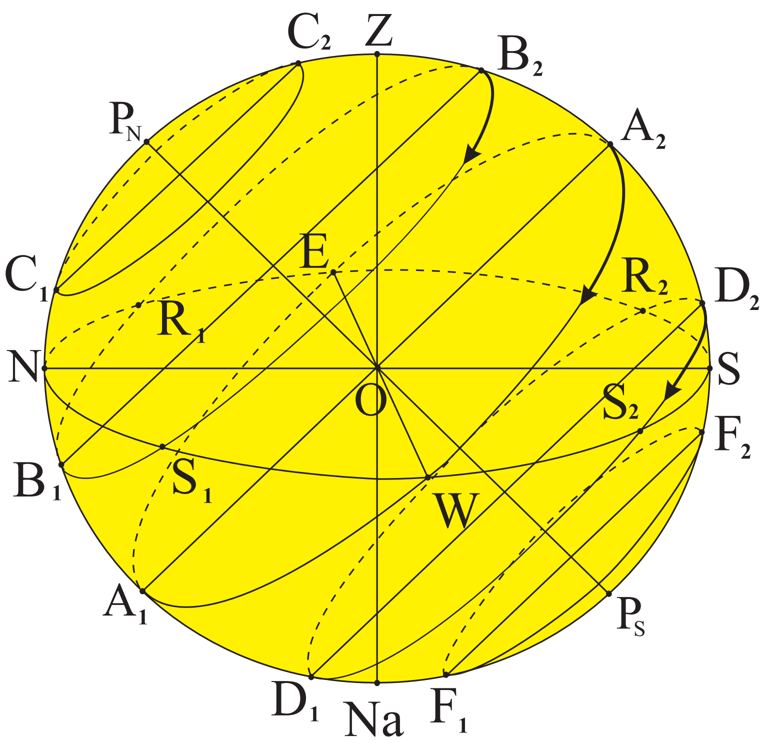

Рис. 3.

Задача № 4.

Условие: Оцените по рис. 1 широту места наблюдения, если известно направление движения звезд у горизонта (показано стрелкой). (3 балла).

Решение:

Прежде всего, необходимо оценить по рисунку угол, который образует стрелка с линией горизонта. Для этого можно использовать либо транспортир, либо обычную линейку, предварительно разложив вектор-стрелку на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых – параллельна горизонту, другая – перпендикулярна ему и определив тангенс угла наклона стрелки (из прямоугольного треугольника)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ell_\perp}{\ell_\parallel} = \frac{2.5}{1.85} = 1.351, \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 53^\circ. \tag{1}$$

α – угол между плоскостью суточной параллели (небесного экватора) и плоскостью математического горизонта. С другой стороны, согласно теореме о высоте h_{P_N} северного полюса мира над горизонтом:

$$h_{P_N} = \varphi. \tag{2}$$

Из рис. 3 очевидно, что

$$h_{P_N} + 90^\circ + \alpha = 180^\circ, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90^\circ - \alpha = 37^\circ. \tag{3}$$

Ответ: $\varphi \approx 37^\circ$ ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5.

Условие: Как известно, Международная космическая станция (МКС) имеет сидерический период обращения вокруг центра Земли, равный 93 мин. По поверхности Земли в плоскости орбиты МКС едет поезд на магнитной подушке с запада на восток со скоростью 600 км/ч. Какой промежуток времени отделяет два последовательных прохождения МКС над поездом. При решении задачи следует полагать, что орбита МКС лежит в экваториальной плоскости Земли.

Дано: $V_P = 600$ км/ч; $T_S = 93$ мин.	***Решение:*** Как известно, МКС движется относительно Земли по почти круговой траектории в том же направлении, что и Земля в своем суточном движении, т.е. с запада на восток. Относительно, земного наблюдателя, находящегося в поезде, МКС будет проходить над поездом через промежуток времени S – синодический период обращения МКС, определяемый уравнением синодического движения:
Найти: S – ?	$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_P}, \;\Rightarrow\; S = \frac{T_P \cdot T_S}{T_P - T_S}. \qquad (4)$$

Здесь T_P – период обращения поезда относительно центра Земли. Для определения последнего параметра необходимо учесть, что поезд едет в том же направлении, что и движется Земля в своем суточном движении, т.е. с запада на восток со скоростью $V_P = 600$ км/ч. Следовательно, результирующая скорость движения поезда относительно центра Земли есть

$$V_P^{(c)} = V_P + V_\oplus = V_P + \frac{2\,\pi\,R_\oplus}{T_\oplus} = 2274\,\text{км/ч}, \qquad (5)$$

здесь $V_\oplus$ – скорость экваториальных точек поверхности Земли (в ее суточном движении), $R_\oplus = 6378$ км – средний экваториальный радиус Земли, $T_\oplus = 86164$ с – сидерический период вращения Земли вокруг своей оси. Следовательно, период обращения поезда T_P можно определить как

$$T_P = \frac{2\,\pi\,R_\oplus}{V_P^{(c)}} = 17.623\,\text{часа} \qquad (6)$$

Вычисляя по формуле (4) синодический период обращения S, в итоге получаем $S = 1.699$ часа ≈ 102 мин.

Ответ: $S = 1.699$ часа ≈ 102 мин. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6.

Условие: Датский астроном Олаф Рёмер (1644-1710) в 1675 г предложил оригинальный метод определения скорости света, основанный на данных наблюдений с Земли затмений спутника Юпитера, Ио. Рёмер наблюдал затмение Ио, в момент противостояния Юпитера, затем вычислял момент времени затмения спутника, когда Юпитер должен находиться в верхнем соединении. Обнаруженная разность времен вычисленного и измеренного ($\delta t = 22$ мин) он объяснял конечностью скорости света, и разностью путей, которые проходит свет от Юпитера до Земли в двух указанных положениях. Используя лишь закон Тициуса-Боде и указанную разность, оцените скорость света, полученную Рёмером. (5 баллов).

Дано:

$\delta t = 22$ мин $= 1320$ сек;

Найти:

c – ?

Решение:

Согласно рис. 4, расстояние от Земли до Юпитера в момент его противостояния (конфигурация EPC3) есть

$$\Delta r_1 = r_J - r_\oplus. \tag{7}$$

Поскольку расстояние от планеты до спутника много меньше гелиоцентрических расстояний планет r_J, $r_\oplus$, то далее мы будем пренебрегать указанным расстоянием в решении.

Расстояние от Земли до Юпитера в момент его верхнего соединения (конфигурация EPC1) есть

$$\Delta r_2 = r_J + r_\oplus. \tag{8}$$

Следовательно, разность расстояний которые преодалевал свет в первом и втором случае есть

$$\Delta r = \Delta r_2 - \Delta r_1 = 2r_\oplus. \tag{9}$$

Как известно, расстояние от Земли до Солнца есть $r_\oplus = 1$ а.е $= 1.496\cdot 10^8$ км. В этом можно также убедиться, воспользовавшись законом Тициуса-Боде (который определяет расстояние планеты от Солнца):

$$r_n = 0.1(4 + 3\cdot 2^n), \tag{10}$$

где n – планетный индекс, для каждой планеты, принимающий свое значение. Так для Меркурия – $n = \infty$, а для Венеры – $n = 0$, для Земли – $n = 1$. На преодаление пути Δr свет тратит время δt, следовательно, c – искомая величина скорости света, полученная Рёмером, есть

$$c = \frac{\Delta r}{\delta t} = \frac{2\,r_\oplus}{\delta t} = \frac{2\cdot 1.496\cdot 10^8\,\text{км}}{22\cdot 60\,\text{с}} = 2.27\cdot 10^5\ \text{км/с}. \tag{11}$$

Ответ: $c = \frac{2\,r_\oplus}{\delta t} = 2.27\cdot 10^5$ км/с. ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 7.

Условие: В 1604 году И. Кеплер наблюдал сверхновую звезду, вспыхнувшую в созвездии Змееносца. Сколько лет прошло со времени вспышки сверхновой (по часам земного наблюдателя), если расстояние до звезды 3333.3 пк? (6 баллов).

Дано:

$r = 3333.3$ пк.

Найти:

Δt – ?

Решение:

Выразим расстояние до сверхновой, вспыхнувшей в созвездии Змееносца, в световых годах:

$$3333.3\,\text{пк}\cdot 3.26\left(\frac{\text{св.л.}}{\text{пк}}\right) = 10867\,\text{св.л.}$$

. Следовательно, 10867 лет свет шел от звезды до Земли.

С 1604 года прошло 408 лет (2012 год). $10867 + 408 = 11275$ лет прошло с тех пор, когда взорвалась звезда, сбросив оболочку. О большей точности говорить не имеет смысла.

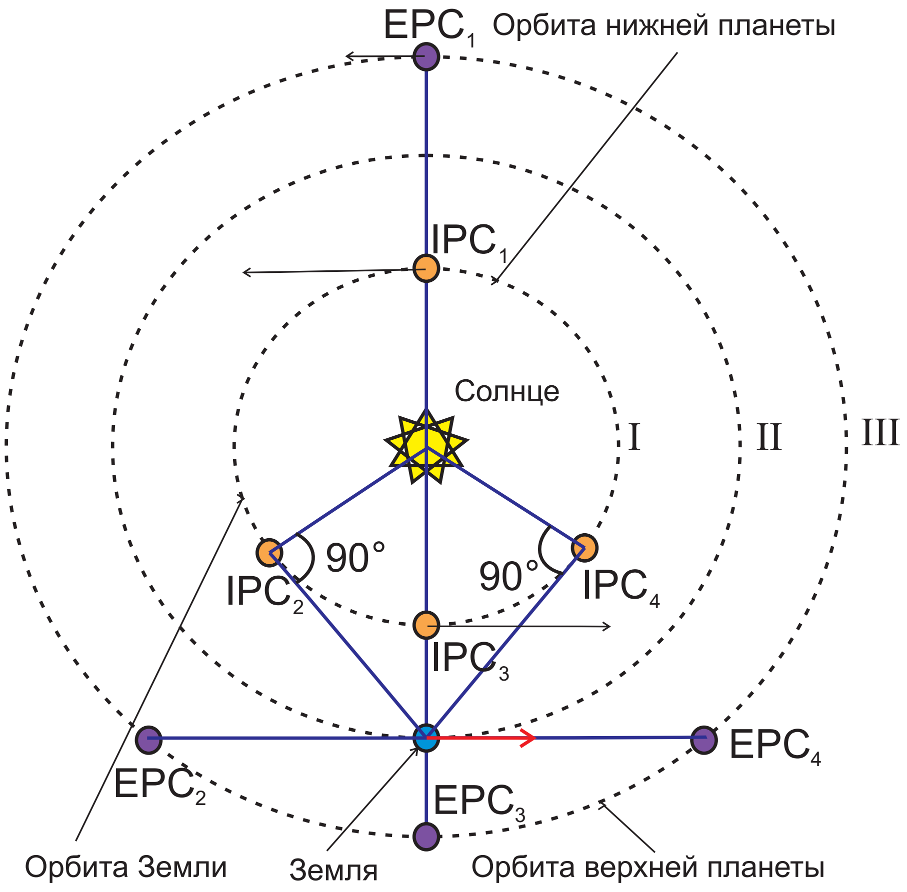

Рис. 4.

Ответ: $\Delta t = 11275$ лет. ($\$_{\max} = 6$ баллов).

Задача № 8.

Условие: В веществе Солнца 70% (по массе) составляет водород, 28% – гелий, 2% – более тяжелые элементы. Оцените среднюю молярную массу вещества Солнца, учитывая, что все вещество Солнца является полностью ионизованным. (7 баллов).

Дано:

$\chi_H = 0.70$,
$\chi_{He} = 0.28$,
$\chi_{heavy} = 0.02$.

Найти:

M_{pl} – ?

Решение:

Прежде всего определим массовую долю i-ого вещества – это отношение массы данного вещества к массе всей смеси веществ

$$\chi_i = \frac{m_i}{m_{tot}} = \frac{\nu_i \cdot M_i}{\nu_{tot} \cdot M_{tot}}, \quad \Rightarrow \quad \nu_i = \nu_{tot} \cdot M_{tot} \left(\frac{\chi_i}{\cdot M_i} \right), \tag{12}$$

здесь ν_i, M_i – количество вещества и молярная масса i-ого сорта вещества; ν_{tot}, M_{tot} – количество вещества и молярная масса смеси. Учитывая, что сумма всех количеств ν_i равна ν_{tot}, получаем

$$\nu_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i, \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \nu_i = \nu_{tot} \cdot M_{tot} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\chi_i}{\cdot M_i} \right), \quad \Rightarrow \quad M_{tot} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\chi_i}{\cdot M_i} \right) \right]^{-1}. \tag{13}$$

Агрегатное состояние звездного вещества – плазма. Здесь основными составляющими являются:

- протоны (p) – ядра атома водорода ($\chi_p = \chi_H = 0.7$, $M_p = 1$ г/моль),

- α -частицы – ядра атома гелия, ($\chi_\alpha = \chi_{He} = 0.28$, $M_p = 4$ г/моль),
- свободные электроны,
- ядра и ионы более тяжелых элементов (начиная с лития и далее по таблице Менделеева).

В силу относительной малости представителей последней фракции, далее вкладом последних в молярную массу смеси будем пренебрегать. Далее определим массовую долю и молярную массу электронов в плазме. Для этого учтем, что на каждый протон приходится 1 электрон, а на каждую α-частицу – 2 электрона. Следовательно, массовую долю электронов можно представить в виде:

$$\chi_e = \frac{m_e \cdot N_p + 2m_e \cdot N_\alpha}{m_{tot}} = m_e \cdot N_A \frac{(\nu_H + 2\nu_{He})}{m_{tot}} = M_e \left(\frac{\chi_H}{M_H} + 2\frac{\chi_{He}}{M_{He}} \right), \ \Rightarrow$$

$$\frac{\chi_e}{M_e} = \left(\frac{\chi_H}{M_H} + 2\frac{\chi_{He}}{M_{He}} \right). \tag{14}$$

Следовательно, молярная масса полностью ионизованной плазмы есть:

$$M_{pl} = M_{tot} = \left[\frac{\chi_H}{M_H} + \frac{\chi_{He}}{M_{He}} + \frac{\chi_e}{M_e} \right]^{-1} = \left[2\frac{\chi_H}{M_H} + 3\frac{\chi_{He}}{M_{He}} \right]^{-1} = 0.62 \text{ г/моль} = 6.2 \cdot 10^{-4} \text{ кг/моль}. \tag{15}$$

Ответ: $M_{pl} = \left[2\frac{\chi_H}{M_H} + 3\frac{\chi_{He}}{M_{He}}\right]^{-1} = 0.62$ г/моль $= 6.2 \cdot 10^{-4}$ кг/моль. ($\$_{\max} = 7$ баллов).

Задача № 9.

Условие: У некоторой звезды лучевая скорость не наблюдается, а собственное движение равно $3''$/год. На сколько звездных величин изменилась видимая звездная величины звезды за последний миллион лет? (8 баллов).

Дано:

$\mu = 3''$/год,
$V_r = 0$ км/с,
$t = 1$ млн. лет.

Найти:

$\Delta m(t)$ – ?

Решение:

Ведем следующие обозначения согласно рис. 5: x – расстояние до звезды в настоящее время, y – расстояние до звезды миллион лет назад, V – скорость звезды в пространстве. Мы находимся в правом нижнем углу треугольника, миллион лет назад звезда находилась в верхнем углу треугольника, а сейчас – в левом нижнем углу.

Так как лучевая скорость не наблюдается (т.е. $V_r = 0$), то треугольник прямоугольный – в настоящее время вектор скорости звезды перпендикулярен направлению на звезду.

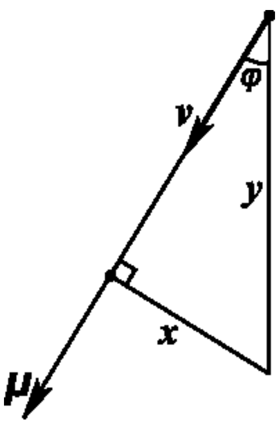

Рис. 5.

Расстояние до звезды в настоящее время можно выразить как $x = V_\tau/\mu = V/\mu$. Заметим, что ***собственное движение звезды*** – это (по определению) ее угловая скорость на небесной сфере, которую выгодно представить в рад/сек.

$$\mu = \frac{3''/\text{год}}{206265''/\text{рад}} = 4.609 \cdot 10^{-13} \, \text{рад/сек}.$$

Расстояние до звезды миллион лет тому назад можно определить по теореме Пифагора:

$$y = \sqrt{x^2 + (V\,t)^2} = V\sqrt{\frac{1}{\mu^2} + t^2}. \tag{16}$$

Следовательно, отношение расстояний y/x есть

$$\frac{y}{x} = \mu\sqrt{\frac{1}{\mu^2} + t^2} = \sqrt{1 + (\mu\,t)^2} = 14.6. \tag{17}$$

здесь учтено, что время $t = 1$ млн. лет $= 3.156 \cdot 10^{13}$ сек.

Воспользуемся формулой Погсона для двух звездных величин данной звезды (определенных для двух моментов времени) и законом обратных квадратов:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = 2.512 \lg\left(\frac{E_2}{E_1}\right), \;\; \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{y}{x}\right)^2. \tag{18}$$

Проводя вычисления, получаем в итоге $\Delta m \approx 5 \lg\left(\frac{y}{x}\right) = 5.8^m$.

Ответ: $\Delta m \approx 5 \lg\left(\frac{y}{x}\right) = 5.8^m$. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10.

Условие: Метероид (метеорное тело), имевший начальную скорость, равную нулю относительно Солнца на бесконечно большом от него расстоянии, начинает падать на Солнце. Какова будет его скорость падения на расстоянии 1.52 а.е. от Солнца. Какова минимальная и максимальная скорость вхождения метеороида в плотные слои атмосферы Марса. (8 баллов).

Дано:

$r_M = 1.52$ а.е.

Найти:

η – ?

Решение:

Согласно условию задачи, тело начинает падать на Солнце из бесконечности, в гравитационном потенциальном поле последнего, следовательно, в силу закона сохранения энергии его потенциальная энергия гравитационного притяжения Солнцем превращается в кинетическую, следовательно:

$$-\frac{G \cdot m \cdot \mathfrak{M}_\odot}{\Delta} = \frac{m V_{\rm hc}^2}{2} - \frac{G \cdot m \cdot \mathfrak{M}_\odot}{r_M},$$

согласно условию задачи $\Delta \to \infty$, тогда

$$V_{\rm hc}^{(0)} = \sqrt{\frac{2\,G\,\mathfrak{M}_\odot}{r_M}} = 34.167\,\text{км/с}, \tag{19}$$

где $V_{\rm hc}^{(0)}$ – гелиоцентрическая скорость (относительно Солнца) малого тела (вторая космическая скорость Солнечной системы на данном расстоянии); $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная; $M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца (взяты из общих справочных астрономических данных). Важно заметить, что $r_M = 1.52$ а.е. – это среднее расстояние Марса от Солнца, то если метеороид пролетает вблизи поверхности планеты, то закон сохранения требует обобщения до вида:

$$-\frac{G \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}_\odot}{\Delta} - \frac{G \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}_♂}{r} = \frac{\mathfrak{M} V_{\rm hc}^2}{2} - \frac{G \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}_♂}{R_♂} - \frac{G \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}_\odot}{r_M},$$

поскольку $r, \Delta \to \infty$, тогда

$$V_{\rm hc}^{(1)} = \sqrt{2G \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}_♂}{R_♂} + \frac{\mathfrak{M}_\odot}{r_M}\right)} = 34.494\,\text{км/с}, \tag{20}$$

где $V_{\rm hc}^{(1)}$ — гелиоцентрическая скорость (относительно Солнца) малого тела с учетом гравитационного поля Марса; $\mathfrak{M}_♂ = 6.419 \cdot 10^{23}$ (кг) — масса Марса, $R_♂ = 3396$ км – радиус Марса.

Для Марса движущегося по круговой орбите можем записать второй закон Ньютона:

$$\mathfrak{M}_♂ \vec{a}_♂ = -\frac{G\mathfrak{M}_♂ \mathfrak{M}_\odot}{r_M^3} \vec{r}_M,$$

здесь $\vec{r}_M$ — радиус-вектор Марса, проведенный из центра Солнца, $\vec{a}_♂$ — его центростремительное ускорение; Среднее расстояние от Марса до Солнца – $r_M = 1.52$ а.е., где 1 а.е.= 149597870.660 км. В таком движении Марс обладает центростремительным ускорением, равным $a_♂ = V_♂^2/r_M$, где $V_♂$ – орбитальная скорость движения Марса вокруг Солнца. Проецируя исходное уравнение на направление "Марс-Солнце", легко определить $V_♂$:

$$V_♂ = \sqrt{\frac{G \cdot \mathfrak{M}_\odot}{r_M}} = 24.131 \text{ км/с}. \tag{21}$$

Скорость малого тела относительно Марса можно представить в виде:

$$\vec{V}_{\rm rel} = \vec{V}_{\rm hc} - \vec{V}_♂, \;\Rightarrow\; V_{\rm rel} = \sqrt{V_{\rm hc}^2 + V_♂^2 - 2V_{\rm hc}V_♂ \cos\alpha}, \tag{22}$$

здесь α – угол между направлением движения Марса и вектором гелиоцентрической скорости тела. Из формулы (22) видно, что максимальное значение скорости достигается при $\alpha = \pi$, т.е. когда гелиоцентрическая скорости тела противоположна направлена по отношению к направлению движения Марса (метеороид встречает Марс с параболической скоростью со стороны апекса — точки на небе, указывающей направление движения Марса вокруг Солнца). Следовательно, $V_{\max} = V_{\rm hc} + V_♂ = 58.625$ км/с. Минимальное значение относительной скорости $V_{\min} = V_{\rm hc} - V_♂ = 10.363$ км/с.

Т.о., метеорные тела могут иметь следующий диапазон скоростей входа в атмосферу Марса:

$$10.363 \text{ км/с } \le V_{\rm rel} \le 58.625 \text{ км/с}. \tag{23}$$

Ответ: $V_{\rm hc}^{(0)} = \sqrt{\frac{2\,G\,\mathfrak{M}_\odot}{r_M}} = 34.167$ км/с; $V_{\rm hc}^{(1)} = \sqrt{2G \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}_♂}{R_♂} + \frac{\mathfrak{M}_\odot}{r_M}\right)} = 34.494$ км/с – гелиоцентрическая скорость, полученная с учетом гравитации Марса; $V_{\min} = 10.363$ км/с, $V_{\max} = 58.625$ км/с. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11.

Условие: Космонавт прилетел на астероид, имеющий форму шара, и обошел его по экватору за два часа. Оцените массу астероида, если известно, что средняя плотность астероида меньше средней плотности Марса, а космонавт передвигался со средней скоростью пешехода. (9 баллов).

Дано:

$\rho_A < \rho_M$,
$V_k = 5$ км/ч,
$\Delta t = 2$ часа.

Найти:

$M^A_{\min}$, $M^A_{\max}$ – ?

Решение:

Допустим, что средняя скорость пешехода $V_k = 5$ км/ч ≈ 1.4 м/с. Так как длина экватора астероида радиуса R_A равна

$$\ell = 2\pi R_A, \text{ иначе } \ell = V_k \cdot \Delta t, \;\Rightarrow\; R_A = \frac{V_k \cdot \Delta t}{2\pi} = 1.604\,\text{км},$$

где Δt – время, за которое космонавт обошел астероид. Тем самым мы знаем объем астероида

$$V_a = \frac{4}{3}\pi R_A^3 = 1.729 \cdot 10^{10} \text{ м}^3. \tag{24}$$

Умножив его на плотность, можем получить массу. Однако нам известно лишь то, что плотность астероида меньше плотности Марса (т.е. меньше $\rho_A < 3933$ кг/м^3), и поэтому мы можем получить лишь верхнюю оценку массы астероида:

$$M^A_{\max} = \rho_M \cdot \frac{4}{3}\pi R_A^3 = 6.80 \cdot 10^{13}\,\text{кг}. \tag{25}$$

Можно также оценить плотность снизу. Астероид маленький и его масса явно невелика. Поэтому обход пешком такого астероида возможен только в том случае, если скорость пешехода не окажется большей, чем первая космическая скорость (иначе пешеход просто улетит). Отсюда следует, что

$$V_k \leq \sqrt{\frac{G\,M_A}{R_A}}, \;\Rightarrow\; M^A_{\min} = \frac{R_A\,V_k^2}{G} = 4.71 \cdot 10^{13}\,\text{кг}$$

Т.о. масса астероида должна быть заключена в интервале:

$$4.70 \cdot 10^{13}\,\text{кг} \leq M_A \leq 6.80 \cdot 10^{13}\,\text{кг}, \;\text{ или }\; M_A = (5.75 \pm 1.05) \cdot 10^{13}\,\text{кг}. \tag{26}$$

Ответ: $M_A = (5.75 \pm 1.05) \cdot 10^{13}$ кг. ($\$_{\max} = 9$ баллов).

Задача № 12.

Условие: Угловое расстояние между точками восхода и захода Юпитера составляет $60°$. Определите склонение планеты на момент наблюдений, если широта места наблюдений равна $\varphi = 53°12'$. В расчетах следует учесть явление рефракции света у горизонта. (10 баллов).

Дано:

$\Delta A = 60°$,
$\varphi = 53°12'$.

Найти:

δ_J – ?

Решение:

Очевидно, что угловое расстояние между точками восхода и захода Юпитера откладывается в плоскости математического горизонта, тогда это расстояние есть разность азимутов точек захода и восхода Юпитера. Поскольку, данные точки всегда располагаются симметрично относительно небесного меридиана, от которого и ведется отсчета азимутов, то азимут точки захода есть $A_{\text{заход}} = \frac{1}{2}\Delta A = 30°$.

Далее следует воспользоваться формулой для азимута точки захода с учетом рефракции света (см. например "Курс сферической астрономии"Куликова или лекции летней астрономической школы 2012 года).

$$\cos A_{\text{заход}} = -\frac{(\sin\delta_J + \sin 35' \cdot \sin\varphi)}{\cos 35' \cdot \cos\varphi}, \;\Rightarrow \tag{27}$$

$$\delta_J = -\arcsin\left[\sin 35' \cdot \sin\varphi + \cos 35' \cdot \cos\varphi \cos A_{\text{заход}}\right] = -31.8°. \tag{28}$$

Аналогичная ситуация реализуется когда $\delta_J = +31.8°$.
Ответ: $\delta_J = \pm 31.8°$ ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Задача № 13.

Условие: Оцените, сколько звезд, таких как Сириус (α Большого Паса – самая яркая звезда ночного неба, звездная величина $m_S = -1.5^m$) нужно собрать вместе, чтобы они светили так же ярко, как полная Луна (звездная величина $m_M = -12.7^m$)? (11 баллов).

Дано:

$m_S = -1.5^m$,
$m_M = -12.7^m$.

Найти:

N – ?

Решение:

Для того чтобы N звезд, таких как Сириус, светили так же ярко, как полная Луна, необходимо выполнение равенства освещенностей, создаваемых этими небесными телами, у поверхности Земли, т.е.

$$N \cdot E_S = E_M, \;\Rightarrow\; N = \frac{E_M}{E_S}.$$

Согласно формуле Погсона:

$$m_S - m_M = 2.512\lg\left(\frac{E_M}{E_S}\right), \;\Rightarrow\; N = \frac{E_M}{E_S} = 10^{0.4(m_S - m_M)} = 30200. \tag{29}$$

Ответ: $N = 30200$. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14.

Условие: В некотором городе в результате засветки неба уличным освещением предельная звездная величина звезд, видимых невооруженным глазом, оказалась равной $m_{\max} = 3.5^m$. Оцените поверхностную яркость неба (звездную величину, приходящуюся на квадратную угловую секунду небесной сферы) в этом городе. (12 баллов).

Дано:	***Решение:***
$m_{\max} = 3.5^m$.	Предельное угловое разрешение человеческого глаза составляет $\beta_{\min} = 1 \div 2'$ или $\beta_{\min} \approx 100''$. Поэтому любая звезда видна на небе, вообще говоря, не как точка, а как пятно с характерным угловым размером $\beta_{\min}$.
Найти: m_{sky} – ?	Угловая площадь такого пятна составляет $\Omega_S = 10^4$ кв. секунд. Будем считать, что для самых слабых видимых невооруженным глазом звезд поверхностная яркость одной кв. секунды неба должна примерно совпадать с поверхностной яркостью одной кв. секунды звезды.

Освещенность, создаваемая одной кв. секундой небосвода есть

$$E_1 = E_S/\Omega_S = 10^{-4} E_S.$$

Так как предельная звездная величина по условию равна $m_{\max} = 3.5^m$, то поверхностная яркость 1 кв.секунды звезды (и неба) можно определить по формуле Погсона (29):

$$m_{sky} - m_{\max} = 2.512 \lg \left(\frac{E_S}{E_1}\right), \ \Rightarrow \ m_{sky} = m_{\max} + 2.512 \lg \left(10^4\right) = 13.5^m/(\text{кв. секунда}). \qquad (30)$$

Это и есть искомая оценка.

Ответ: $m_{sky} = 13.5^m/$(кв. секунда). ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15.

Условие: За какое время можно упасть на Солнце с орбиты Марса, если падать с нулевой начальной скоростью относительно Солнца (масса Солнца – $2 \cdot 10^{33}$ г, радиус Солнца – $7 \cdot 10^5$ км, большая полуось орбиты – 1.52 а.е.)? (13 баллов).

Дано:	***Решение:***
$M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г, $R_\odot = 7 \cdot 10^5$ кмб $r_M = 1.52$ а.е.	Время падения на Солнце (или на любой другой объект в подобных условиях) легче всего получить, если считать, что падение происходит по так называемому "вырожденному" эллипсу – эллипсу с нулевой малой полуосью (т.е. просто отрезку прямой).
Найти: t_{fall} – ?	Тогда расстояние от начальной точки падения до Солнца r_M будет равно большой оси $2a$ этого эллипса (следовательно, $a = r_M/2$), а время падения – половине периода обращения T по такому эллипсу ($t_{fall} = T/2$). Для вычисления периода нужно воспользоваться III законом Кеплера:

$$\frac{T^2}{T_\oplus^2} = \frac{a^3}{a_\oplus^3}, \ \Rightarrow \ T = T_\oplus \left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^{3/2}, \ \Rightarrow \ t_{fall} = \frac{T_\oplus}{2}\left(\frac{r_M}{2a_\oplus}\right)^{3/2} = 0.33\,\text{года} = 121\,\text{день}. \qquad (31)$$

здесь учтено, что $a_\oplus = 1$ а.е. – среднее расстояние от Земли до Солнца, $T_\oplus = 1$ год – сидерический период обращения Земли вокруг Солнца. Учитывать то, что Солнце – не материальная точка, очевидно бессмысленно, поскольку радиус Солнца примерно в 200 раз меньше расстояния от Земли до Солнца.

<u>Ответ:</u> $t_{fall} = \frac{T_\oplus}{2}\left(\frac{r_M}{2a_\oplus}\right)^{3/2} = 0.33\,\text{года} = 121\,\text{день}$. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16.

<u>Условие:</u> Четыре звезды одинаковой массы образуют квадрат со стороной L и двигаются по одной окружности с периодом T. Найти массы звезд. (13 баллов).

<u>Дано:</u>

L,
T,
$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}$.

<u>Найти:</u>

$\mathfrak{M}$ – ?

<u>Решение:</u>

Рассмотрим круговое движение звезды 1 (см. рис. 6). Поскольку последняя движется по окружности с постоянной скоростью, то результирующая сила, действующая на данное тело – центростремительная сила. Она определяется векторной суммой трех сил притяжения – $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{31}$, $\vec{F}_{41}$, действующих со стороны трех других звезд на данную. Согласно правилу сложения векторов, с использованием свойств квадрата имеем:

$$F_{\text{рез}} = 2\,F_{21}\cos 45^\circ + F_{31} = 2\frac{G\,\mathfrak{M}^2}{L^2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{G\,\mathfrak{M}^2}{2L^2} = \frac{G\,\mathfrak{M}^2}{L^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right). \tag{32}$$

С другой стороны центростремительную силу можно представить в виде:

$$F_{\text{ц.с.}} = \mathfrak{M}\cdot a_{\text{ц.с.}} = \mathfrak{M}\cdot\frac{V^2}{R}. \tag{33}$$

учитывая, что движение по окружности является равномерным и связь радиуса окружности с стороной треугольника

$$V = \frac{2\pi R}{T},\ \ R = \frac{L}{\sqrt{2}}, \tag{34}$$

в результате получаем уравнение вида (второй закон Ньютона для звезды 1):

$$\mathfrak{M}\frac{4\pi^2 L}{\sqrt{2}T^2} = \frac{G\,\mathfrak{M}^2}{L^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right),\ \ \Rightarrow\ \ \mathfrak{M} = \frac{8}{(4+\sqrt{2})}\pi^2\frac{L^3}{G\,T^2}. \tag{35}$$

<u>Ответ:</u> $\mathfrak{M} = \frac{8}{(4+\sqrt{2})}\pi^2\frac{L^3}{G\,T^2}$. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

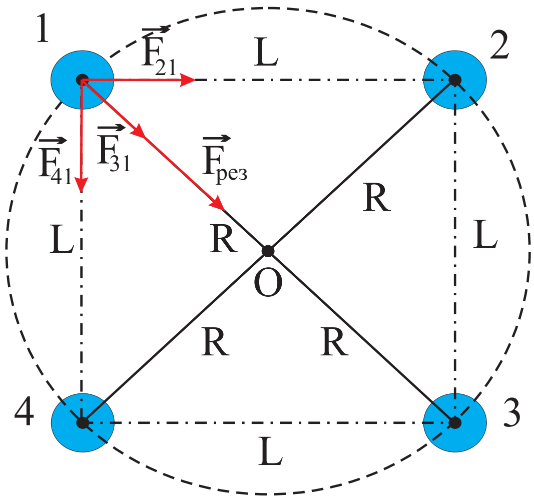

Рис. 6.

Задача № 17.

Условие: Вокруг Земли по геостационарной орбите движется спутник-ретранслятор массой 2 тонны. Спутник непрерывно излучает вниз радиоизлучение со средней мощностью 3 кВт. Оцените, насколько (за счет излучения) изменится радиус орбиты спутника за год. (14 баллов).

Дано:

$P = 3$ кВт,
$m = 2$ тонны,
$t = 1$ год.

Найти:

ΔR – ?

Решение:

Спутник, излучающий вниз, фактически является фотонной ракетой (хотя и с очень малой тягой). За время Δt он испускает энергию $P \cdot \Delta t$ (где P – мощность излучения), при этом спутник получает импульс, равный $P \cdot \Delta t / c$ (c – скорость света). Следовательно, на спутник действует постоянная по модулю направленная вверх сила давления, равная $F_p = P/c$.

Однако на спутник, движущийся по круговой орбите, действует также постоянная по модулю сила F_{at}, направленная вниз – *сила тяготения Земли.* Сила F_p частично компенсирует силу тяготения F_{at}, однако результирующая сила также будет постоянной и направленной вниз, поэтому спутник, уже находящийся на некоторой круговой орбите, на этой орбите и останется. Следовательно, ***радиус орбиты изменяться не будет***. Заметим также, что даже без вычислений очевидно, что сила тяготения намного превосходит силу F (в действительности - на $7 \div 8$ порядков), а это означает, что орбита спутника почти не будет отличаться от геостационарной орбиты для обычного спутника (аккуратный подсчет даст разницу в радиусах орбит около 20 м).

Ответ: радиус орбиты спутника изменяться не будет. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18.

Условие: На каком расстоянии от Земли должна находиться Луна, чтобы ее невозможно было увидеть во время лунного затмения? В расчетах принять во внимание рефракцию света в атмосфере Земли. (15 баллов).

Решение:

Оценим расстояние от Земли, на котором земная тень «заканчивается», т.е. сходится в точку

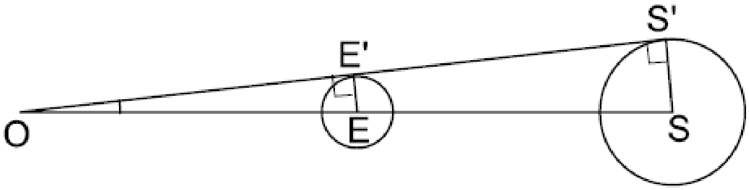

Рис. 7. К определению геометрической тени Земли.

(OE на рис. 7). Из рис. 7 (S – Солнце, E – Земля) видно, что, $\triangle SOS'$ и $\triangle EOE'$ подобны, поэтому

$$\frac{SS'}{EE'} = \frac{OS}{OE},$$

в то же время $OS = OE + ES$, тогда

$$OE = \frac{ES}{\left(\frac{SS'}{EE'} - 1\right)} \approx ES\left(\frac{EE'}{SS'}\right).$$

при выводе последнего выражения мы учли, что $SS'/EE' \gg 1$.

Известно, что Земля примерно в 100 раз меньше Солнца, следовательно, земная тень сходится в точку на расстоянии примерно 0.01 а.е. от Земли, что заведомо больше расстояния до Луны. Казалось бы, так как Луна в видимой области спектра светит отраженным светом, она не должна быть видна во время любого полного затмения. Однако во время даже центральных теневых затмений Луна не исчезает полностью, а становится темнокрасной. Это связано с тем, что солнечные лучи, идущие по касательной к поверхности Земли, преломляются в ее атмосфере и частично достигают Луны даже внутри тени.

Для того, чтобы Луна во время затмений не была видна, она должна находиться ближе к Земле, в той области, где размеры "абсолютной" тени Земли (с учетом рефракции) больше размеров Луны.

Известно, что рефракция у горизонта примерно равна угловому диаметру Луны (или Солнца), т.е. $\approx 0.5°$. Следует учесть, что при прохождении "насквозь" через атмосферу, лучи света испытывают преломление как "на входе" в нее, так и "на выходе", так что результирующее отклонение луча в максимуме может достигать $\approx 1°$ ($\angle OE'O'$ на рис. 8).

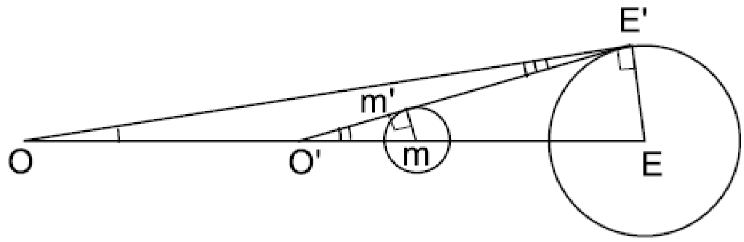

Рис. 8. К определению расстояния до Луны, находящейся в "абсолютной тени"Земли.

Нам нужно оценить расстояние mE. Треугольник $\triangle Om'm$ – прямоугольный, а $\triangle O'E'E$ – нет, так как $\angle O'E'E = 89°$, однако при оценке этим можно пренебречь и считать, что для этих треугольников тоже справедливо соотношение

$$\frac{O'm}{O'E} = \frac{mm'}{EE'}.$$

Так как Луна примерно в 4 раза меньше Земли, то можно считать, что $mE = \frac{3}{4}O'E$.

Оценим $O'E$. $\angle E'O'E = \angle E'OE + 1°$, т.к. угол при вершине E' уменьшился на $1°$, а при E – не изменился. $\angle E'OE \approx \frac{EE'}{OE} = 4.3 \cdot 10^{-3}$ рад $\approx 14'$. Следовательно $\angle E'O'E = 1°14'$. Считая $\triangle O'E'E$ прямоугольным, получим

$$O'E = \frac{EE'}{\sin(\angle E'O'E)} = \frac{EE'}{\angle E'O'E\,(\text{в радианах})} \approx \frac{6.4 \cdot 10^3}{2.2 \cdot 10^{-2}} \approx 3 \cdot 10^5\,\text{км}.$$

Отсюда $mE \approx \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 10^5 \approx 2.3 \cdot 10^5$ км, т.е., чтобы "исчезать" во время затмений, Луна должна находиться примерно в полтора раза ближе к Земле, чем сейчас.

Ответ: Луна должна находиться на расстоянии $\approx 2.3 \cdot 10^5$ км от Земли, чтобы "исчезать" во время затмений. ($\$_{\mathrm{max}} = 15$ баллов).